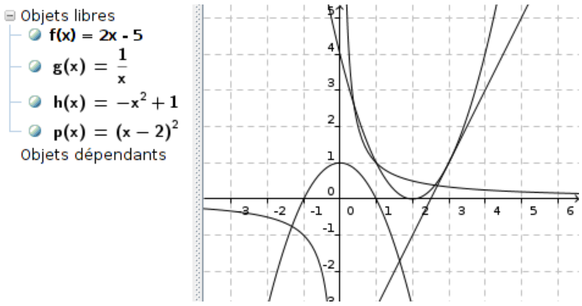
Quelques rappels

Ex 1 :

Associer chaque fonction à sa courbe et donner ses variations.



Ex 2 :

Parmi ces fonctions, lesquelles sont décroissantes sur l'intervalle [3;4] .

a) $f(x)=-4x+5$ b) $g(x)=(4-x)^2$ c) $h(x)=\frac{3}{5}x-8$

d) $i(x)=\frac{1}{x}$ e) $j(x)=-(x+3)^2-5$ f) $k(x)=5-x^2$

Ex 3 :

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une fonction affine, d'une fonction homographique ou d'un trinôme du second degré.

a) $f(x)=\frac{3x-5}{4}$ b) $g(x)=\frac{x^2}{5}+7$ c) $h(x)=\frac{2x-7}{x-4}$

d) $i(x)=\frac{2x+2}{x+1}$ e) $j(x)=2-x^2$ f) $k(x)=(x-2)(x-3)$

Ex 4 :

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son ensemble de définition et ses variations.

a) $f(x)=-4x+5$ b) $g(x)=\frac{x^2}{5}+7$ c) $h(x)=\frac{3}{5}x-8$

d) $i(x)=\frac{1}{x}$ e) $j(x)=(x-3)^2+5$ f) $k(x)=5-x^2$

Ex 5 : ***Fonctions homographiques***

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si cette fonction est homographique . Si tel est le cas, déterminer son ensemble de définition, puis, à l'aide de la calculatrice, préciser quelles semblent être ses variations.

a) $f(x)=\frac{3x-5}{2x-1}$ b) $g(x)=\frac{x-\frac{1}{2}}{3x-5}$ c) $h(x)=\frac{x-\sqrt{2}}{\frac{3}{5}x-1}$

Valeur absolue d'un réel

Ex 6 : ***Vrai ou faux – restituer les notions du cours***

1) La fonction valeur absolue n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.
2) La fonction valeur absolue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) L'image du réel -5 par la fonction valeur absolue est 5.
4) La courbe représentative C_f de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
5) La valeur absolue d'un réel négatif est un réel positif.

6) A(-5;5) appartient à la courbe C_f .
7) B(3;3) appartient à la courbe C_f .
8) C(3;-3) appartient à la courbe C_f .

Ex 7 : ***QCM – restituer les notions du cours***

Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

a) $|\sqrt{3}-1|=1-\sqrt{3}$ b) $|\pi-3|=\pi-3$ c) $|10^{-5}|=10^5$

d) $|\sqrt{2}-1,5|=1,5-\sqrt{2}$ e) $\left|-\frac{4}{7}\right|=\frac{4}{7}$ f) $\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

g) $|10^3-10^4|=10^3-10^4$ h) $|10^{-3}-10^{-4}|=10^{-3}-10^{-4}$

Ex 8 : ***Utiliser les variations***

Compléter les pointillés par $\leqslant$ ou $\geqslant$:

a) $|2,7|$ … $|3,8|$ b) $|-2,7|$ … $|-2,4|$

c) $|-\pi|$ … $|3,14|$ a) $|-1,41|$ … $|-\sqrt{2}|$

Ex 9 : ***Inégalité concernant*** $|x|$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une inégalité concernant $|x|$.

a) $x<-7$ b) $x\geqslant 3$ c) $x\leqslant -4$ d) $-3\leqslant x\leqslant 8$

e) $-4<x\leqslant 4$ f) $-4<x<2$

Ex 10 : ***Simplification***

Soit $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^-$. Simplifier :

a) $|ab|$ b) $|a+3|$ c) $|4-b|$ d) $|b-a|$ e) $\left|\frac{b}{a}\right|$ f) $|a|\times|b|$

Ex 11 : ***Valeur absolue d'un produit et d'un quotient.***

1) Compléter le tableau ci-dessous :

x	3	-2	3	-4	5	-4
y	4	3	-5	-3	-7	0,1
$\lvert x\rvert\times\lvert y\rvert$						
xy						
$\lvert xy\rvert$						

2) Que peut-on conjecturer concernant la valeur absolue d'un produit de deux réels ?

3) Démontrer ce résultat dans les cas ci-dessous :
- $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$ - $x\leqslant 0$ et $y\geqslant 0$ - $x\geqslant 0$ et $y\leqslant 0$ - $x\leqslant 0$ et $y\leqslant 0$

Conclure.
4) Quel résultat analogue peut-on imaginer concernant la valeur absolue d'un quotient ? Démontrer-le.

Ex 12 : $|x|$ ***et*** $\sqrt{x^2}$

1) Calculer $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{(-11)^2}$ et $\sqrt{(-7)^2}$
2) Conjecturer une formule permettant de simplifier l'écriture de $\sqrt{x^2}$.
3) Simplifier : $A=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ et $B=\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}$

Ex 13 : ***Équation de la forme*** $|x|=k$

1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $|x|=3$ b) $|x|=0$ c) $|x|=-1$

2) Par le calcul :
a) Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $|x|=k$?

b) Résoudre l'équation $|x|=0$.

c) Soit $k\in\mathbb{R}_-^*$.

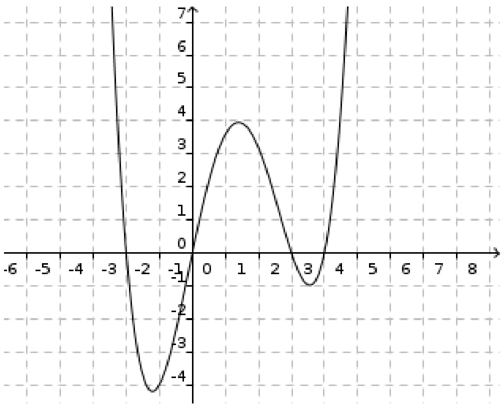
Déterminer le (ou les) réel(s) positif(s) solution(s) de l'équation $|x|=k$.
Déterminer le (ou les) réel(s) négatif(s) solution(s) de l'équation $|x|=k$.
Conclure.

3) Résoudre par le calcul les équations suivantes :

a) $|x|=3{,}5$ b) $|x|=-2$ c) $|x|=1-\sqrt{2}$

Ex 14 : ***$|f(x)|$ et $f(|x|)$***

On considère la fonction f représentée ci-contre.



Représenter :

- en rouge $|f(x)|$
- en vert $f(|x|)$

Ex 15: ***Fonctions affines par morceaux***

1) Exprimer sans valeur absolue la fonction f définie par
$f(x)=|3x+5|+4|-2x+2|$

2) Représenter graphiquement cette fonction.

Fonction racine carrée

Ex 16 : ***Vrai ou faux – restituer les notions du cours***

1) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) L'image du réel -3 par la fonction racine carrée est 3.

4) L'image du réel -3^2 par la fonction racine carrée est 3.

5) La courbe représentative C_f de la fonction racine carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

6) A(4;2) appartient à C_f .

7) B(-1;1) appartient à C_f .

8) C(2;1,4) appartient à C_f .

Ex 17 : ***QCM – restituer les notions du cours***

Parmi les réels ci-dessous lesquels sont des antécédents de 9 par la fonction racine carrée ?

a) -81 b) $\sqrt{9}$ c) 9 d) 81 e) $\sqrt{81}$ f) -9 g) 3 h) -3

Ex 18 : ***Ensemble de définition et variations***

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de la fonction proposée puis trouver ses variations.

a) $f(x)=-2\sqrt{x}$ b) $g(x)=-\sqrt{2-x}$ c) $h(x)=\sqrt{1-3x}$ d) $i(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Ex 19 : ***Racine carrée au dénominateur***

Dans chacun des cas ci-dessous, supprimer les racines carrées du dénominateur.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-5}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Ex 20 : ***Identité remarquable***

Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que les quantités ci-dessous sont de même signe :

a) $4-\sqrt{x}$ et $16-x$ b) $\sqrt{5}-\sqrt{x}$ et $5-x$ c) $\sqrt{x}-3$ et $x-9$

Ex 21 : ***Utiliser les variations***

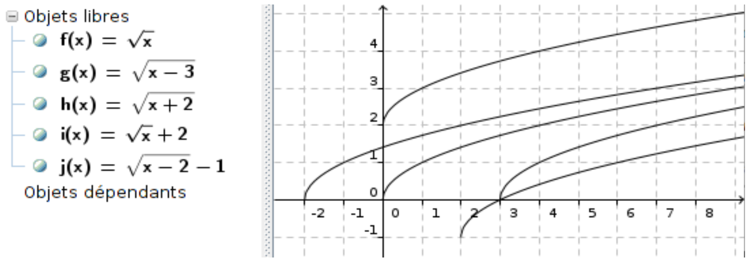
1) Dans chacun des cas suivants, déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$.

a) $2<x<8$ b) $0\leqslant x\leqslant 18$ c) $10^4\leqslant x\leqslant 10^{10}$

2) Compléter les pointillés par $\leqslant$ ou $\geqslant$.

a) $\sqrt{5}$ … $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{\pi-3}$ ... $\sqrt{\pi-2}$ c) $\sqrt{10^{-2}}$ … $\sqrt{10^{-3}}$

Ex 22 : ***Fonctions associées***



1) Déterminer les domaines de définition de ces cinq fonctions.

2) Associer chaque fonction avec sa courbe représentative.

3) Conjecturer comment on peut déduire les courbes représentatives de g , h , i et j de celle de la fonction f .

Ex 23 : ***Algorithme – principe de dichotomie***

1) Déterminer deux nombres entiers consécutifs a et b tels que $a<\sqrt{3}<b$

2) Déterminer si on a $\sqrt{3}\in\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$ ou $\sqrt{3}\in\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$.

3) On considère l'algorithme ci-dessous où p désigne la précision.

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
p=float(input("p="))
while(b-a>p):
   m=(a+b)/2
   if(m**2<3):
      a=m
   else:
      b=m
print("a=",a," b=",b)
```

(faire tourner le programe)

Quelle valeur cet algorithme permet-il d'estimer ?

4) a) En faisant tourner l'algorithme à la main, déterminer ce qu'il renvoie lorsque $p=0{,}3$, puis $p=0{,}1$?

b) Programmer l'algorithme et déterminer ce qu'il renvoie si p =0,0001

5) Démontrer qu'en modifiant seulement quelques lignes du programme, on peut obtenir un algorithme qui calcule une valeur approchée de la racine carrée d'un entier naturel non nul n donné

```
n=float(input("Valeur approchée de racine de n"))
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
p=float(input("p="))
while(b-a>p):
   m=(a+b)/2
   if(m**2<n):
      a=m
   else:
      b=m
print("a=",a," b=",b)
```

(faire tourner le programe)

Ex 24 : ***Équation de la forme*** $\sqrt{x}=k$

1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $\sqrt{x}=3$ b) $\sqrt{x}=\sqrt{5}$ c) $\sqrt{x}=-1$ d) $\sqrt{x}=0$

2) Par le calcul :

a) Soit $k\in\mathbb{R}_-^*$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x}=k$?

b) Résoudre l'équation $\sqrt{x}=0$.

c) Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que, si x est solution de l'équation $\sqrt{x}=k$, alors $x=k^2$.
Réciproquement, démontrer que le réel k^2 est solution de l'équation.

$\sqrt{x}=k$. Conclure.

3) Résoudre par le calcul les équations suivantes :

a) $\sqrt{x}=7$ b) $\sqrt{x}=2{,}71$

Opérations sur les fonctions - variations

Ex 25 : ***Vrai ou faux – restituer les notions du cours***

1) La fonction $x\longmapsto\sqrt{x}-4$ a les mêmes variations sur $\mathbb{R}^+$ que la fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$.

2) La fonction $x\longmapsto 3(2-x)$ à des variations opposées à celles de la fonction $x\longmapsto(2-x)$.

3) Si une fonction u est positive sur [2;7], alors la fonction $\sqrt{u}$ est définie sur [2;7].

4) La fonction $x\longmapsto x$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même pour la fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$.

5) Pour que la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x(x-2)^2}$ soit définie sur un intervalle I, il suffit que la fonction $x\longmapsto x(x-2)^2$ ne s'annule pas sur I.

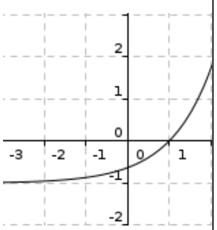
Ex 26 : ***QCM – restituer les notions du cours***

Soit u une fonction définie, strictement positive et strictement croissante sur un intervalle I. Parmi les fonctions ci-dessous, lesquelles sont strictement croissantes sur I :

a) $u-3$ b) $u+7$ c) $-5u$ d) $(3-\pi)u$ e) $\dfrac{1}{u}$ f) $\sqrt{u}$

Ex 27 : ***Vrai ou faux – restituer les notions du cours***

Soit la fonction u définie sur l'intervalle I=[-3;2] représentée ci-contre.



1) La fonction $u+5$ est définie est croissante sur I.

2) La fonction $u-3$ est définie est croissante sur I.

3) La fonction $-u$ est définie est décroissante sur I.

4) La fonction $4u$ est définie est croissante sur I.

5) La fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie est décroissante sur I.

6) La fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie est décroissante sur [-3;1].

7) La fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie est décroissante sur]1;2].

8) La fonction $\sqrt{u}$ est définie est croissante sur I.

9) La fonction $\sqrt{u}$ est définie est croissante sur [1;2].

10) La fonction $\sqrt{-u}$ est définie est décroissante sur [-3;1].

Ex 28 : ***Fonctions associées et variations***

1) Soit la fonction f définie sur I=[0;3] par $f(x)=(x+1)^2$.

a) Déterminer les variations de f sur l'intervalle I.

b) Déterminer les variations sur I des fonctions $f-2$, $f-3$, $f+1$, $f-1$, $f+3$.

c) Tracer sur la calculatrice les courbes représentant ces fonctions . Quel lien existe-t-il entre ces courbes ?

2) Soit la fonction g définie sur I=[-3;3] par $g(x)=|x|$.

a) Déterminer les variations de g sur l'intervalle I.

b) Déterminer les variations sur I des fonctions $g-3$, $g+1$, $-3g$ et $5g$

Ex 29 : ***Variations de*** $\sqrt{u}$ ***et*** $\dfrac{1}{u}$

1) Dans chacun des cas, la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas définie sur l'intervalle I tout entier . Déterminer un intervalle J le plus grand possible contenu dans I sur lequel la fonction $\sqrt{u}$ est définie, puis déterminer ses variations sur J.

a) $u:x\longmapsto x+2$, I=[-4;5] b) $u:x\longmapsto x^2-4$, $\text{I}=[0;10]$

c) $u:x\longmapsto 3x-8$, $\text{I}=[0;5]$

2) Mêmes questions avec la fonction $\dfrac{1}{u}$.

Ex 30 : ***Variations successives***

Déterminer les variations de u , puis en déduire successivement celles de v , puis de w sur l'intervalle I indiqué, en justifiant pourquoi ces fonctions sont bien définies.

1) $\text{I}=[-1;+\infty[$, $u:x\longmapsto x^2+1$, $v:x\longmapsto\dfrac{1}{u(x)}$, $w:x\longmapsto\sqrt{v(x)}$

2) $\text{I}=[0;4[$, $u:x\longmapsto 2x+1$, $v:x\longmapsto\sqrt{u(x)}$, $w:x\longmapsto v(x)-7$

3) $\text{I}=[2;+\infty[$, $u:x\longmapsto x-1$, $v:x\longmapsto\dfrac{1}{u(x)}$, $w:x\longmapsto 4v(x)$

Ex 31 : ***Tableau de variations***

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [-4;5] dont le tableau de variations est le suivant :

x	- 4		-2	0	2		5
f	2	↘	-4	↗	-1	↘	-6

Déterminer le tableau de variations sur [-4;5] des fonctions suivantes :

a) $f+1$ b) $3f$ c) $-f$ d) $\dfrac{1}{f}$ e) $\sqrt{-f}$

Ex 32 : ***Distance d'un point à une courbe***

Soit $f:x\longmapsto\sqrt{x}$, C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal et le point $\text{A}(2;0)$.

1) Montrer que la distance $d(x)$ entre le point A et un point $\text{M}(x;\sqrt{x})$ de C_f (avec $x\geqslant 0$) est donnée par $d(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}}$

2) Déterminer les variations de la fonction $u:x\longmapsto\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$ sur $\mathbb{R}^+$, puis celles de la fonction d .

3) En déduire quel est le point de C_f le plus proche de A.